자기 주도형 수학 교육

- 별무리학교 프로그램

2016.03

㈜ 참교육연구소 & ㈜ 케이수학

수학 교육관련 질문 들

☐ 수학, 왜 공부 많이 하는데 점수가 안 나오나요?

☐ 선행 학습을 제대로 한 거 맞나요?

☐ 수학을 포기한 상태입니다. 다시 시작할 수 있나요?

☐ 수학 쉽게 공부하는 방법은 있나요?

☐ 좋은 선생님 어떻게 찾나요?

☐ .....

수학 교육 잘하는 방법 | 핵심 접근법

□ 혼자 풀고 혼자 생각해야 (자기 주도형)

- 문제 푸는 과정의 이해가 중요함. 직접 손으로 풀어야 한다.
- 선생님은 처음만 도와주고...스스로 많이 풀어 봐야 한다.

□ 중학교 수학 과정이 튼튼해야

- 수학은 계통 수학이다.
  즉, 중학교 수학이 밑바닥 기초가 된다.

□ 개념을 정확히 이해하고, 오답은 이해할 때 까지 반복적으로 풀어야

- 오답은 오 개념에 기인한 것이다.
- 오답이나 설익게 알고 있는 개념을 보완해야 한다.

□ 쉬운 것부터 ~ 어려운 것까지 빈틈없이

- 어려운 것만 푼다고 성공하는 것이 아니다.
- 문제 난이도가 균형을 가지고 있어야 한다. (기초 ~ 심화 문제)

수학 교육 잘하는 방법 | 체계적인 학습

개념 이해 → 예제 풀이 (기초 문제) → 오답 해석 → 예제 풀이 (심화 문제) → 오답 해석 (반복 학습)

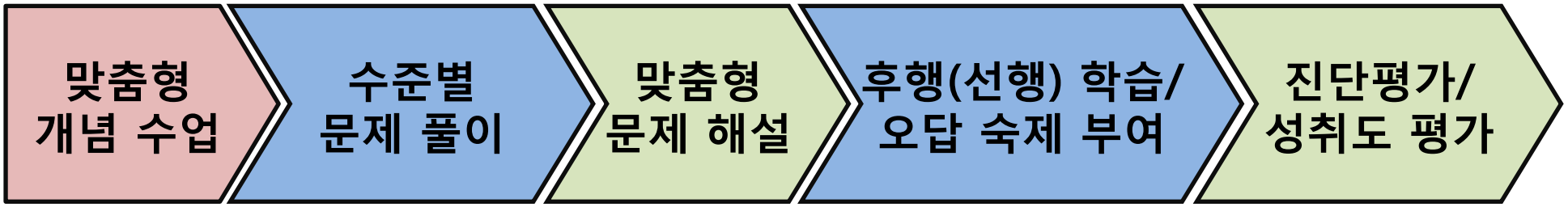
공부하는 습관,
나름대로 방법 체득

자기 주도적인 학습 가능

K-Tutor 수학 | 구성 체계

[수학 학습 체계도]

1:1 맞춤형, 연산력 학습



[K-Tutor Math.]

□ 깊이 알고 이해 가능하도록 제대로 된 개념서 만들기

- 최대한 상세하고, 설명 글을 많이 작성

→ 스스로 정독을 통해 이해가 가능하도록..

이차방정식의 근과 계수의 관계 07

이제 이차방정식의 근과 계수의 관계에 대해 공부하겠습니다. 근과 계수의 관계는 방정식의 근을 직접 구하지 않고 계수만 이용해서 방정식의 근끼리의 합이나 곱 등을 구할 수 있는 공식입니다.

한편 근과 계수의 관계는 이차방정식을 비롯한 삼차 이상의 고차방정식에도 존재하는데 수학 I 에서는 이차방정식의 근과 계수의 관계(이번 단원)와 삼차방정식의 근과 계수의 관계(11단원)에 대해 다루게 됩니다.

또한, 이 단원에서는 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용한 다음과 같은 내용에 대해서도 공부합니다.

① 두 근이 주어졌을 때 이차방정식 만들기
② 다항식을 복소수 범위까지 인수분해하기

(1) 이차방정식의 근과 계수의 관계

근과 계수의 관계를 이용하면 이차방정식의 근을 직접 구하지 않고도 두 근의 합과 곱을 쉽게 알아낼 수 있습니다. 이차방정식의 근과 계수의 관계는 다음과 같은 방법으로 유도할 수 있습니다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (단, $a\neq0$)의 두 근을 α, β라 하고

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

라고 놓겠습니다. 그리고 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하면 다음과 같습니다.

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{(2a)^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

따라서 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (단, $a\neq0$)의 두 근을 α, β라 하면

① $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$　　② $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

예제 07-01

이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 값을 구하여라.

(1) $\alpha+\beta$　(2) $\alpha\beta$　(3) $\alpha^2+\beta^2$
(4) $\alpha^3+\beta^3$　(5) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$　(6) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

실마리

이 문제의 경우 근의 공식을 이용해서 주어진 이차방정식의 두 근을 직접 구하고 그 값을 위의 식에 대입하는 방법은 계산 과정이 복잡하므로 좋은 방법이 아닙니다. 이 문제는 근과 계수의 관계를 이용해서 $\alpha+\beta$의 값과 $\alpha\beta$의 값을 각각 구한 뒤 이를 이용해서 주어진 식의 값을 구하는 방법을 이용해야 합니다. 참고로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖습니다.

풀이

(1) 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-\frac{(-3)}{1}=3$

(2) 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha\beta=\frac{5}{1}=5$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=3^2-2\cdot5=-1$

(4) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=3^3-3\cdot5\cdot3=-18$

(5) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{5}$

(6) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{-1}{5}=-\frac{1}{5}$

K-Tutor 수학 | 문제 구성

□ 30,000개 유형 문제 발굴

- 각 단원별 기존 출제 유형 분석
  : 중학교 ~ 고등과정 전체 과정

출판 교재 + 기출 문제 + 자체 추가 = **30,000개 유형**

□ 문제 갯수

- 자기 주도 학습을 위해 각 단원별 90~100개 할당

□ 문제 난이도 조정

- 레벨 1 ~ 레벨 5 : 쉬운 것부터~ 어려운 것까지 골고루 배치
- 레벨별 기초 및 심화 문제 차별화 적용 (속성 과정: 레벨1 ~레벨3)

	개념서	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5
문제 수(단원별)		10문제 내외	20문제	20문제	20문제	20문제
심화문제 비중		-	20% ↓	30%	40%	50%

K-Tutor 수학 | 수업 방식

맞춤형 개념 수업 → 수준별 문제 풀이 → 맞춤형 문제 해설 → 후행(선행) 학습/ 오답 숙제 부여 → 진단평가/ 성취도 평가

□ **1단계: 해당 단원 개념서 정독**

- 한 단원 읽는데 30분 정도 소요

□ **2단계: 기초 문제 풀이 (레벨1)**

- 개념에 기반한 가장 기초적인 문제 풀이 (10 문제 내외, 30분 소요)

  → 이해한 개념과 문제간 연결하는 과정 (Open Book 가능)

- 틀린 문제 중심으로 개별 설명 (통상 60~80% 정답)

  → 틀린 문제는 개념 이해가 부족

□ **3단계: 레벨2 문제 풀이**

- 기본 개념 + 부분 심화 문제 (20 문제 내외, 60분 소요)

  → 이해 못한 개념 및 설익게 이해한 개념 재확인

- 틀린 문제 중심으로 다시 개별 설명

  → 학생이 이해해 가며, 스스로 Correction 해 나가는 과정

K-Tutor 수학 | 수업 방식

맞춤형 개념 수업 → 수준별 문제 풀이 → 맞춤형 문제 해설 → 후행(선행) 학습/ 오답 숙제 부여 → 진단평가/ 성취도 평가

□ 단계: 레벨3 문제 풀이

- 기본 개념 + 심화 문제 비중 강화 (20 문제 내외, 60분 소요)

  → 개념 이해 및 스스로 문제 해결해 나감.

- 다시 틀린 문제 중심으로 개별 설명
- 학생 수준 파악 및 오답 문제 시스템 반영

  → 학생이 이해해 가며, 스스로 Correction 해 나가는 과정

□ 5단계: Homework 1

- 틀린 문제들에 대한 오답 문제집

  → 스스로 풀어 보도록 함. 다음 수업시간에 제출 및 채점

  → 오답율 10% 이하는 정상 수준, 30%이상이면 그 단원 낙제 수준. (재 수강)

  선생님이 다시 설명하고 채점 내용 시스템 반영

K-Tutor 수학 | 수업 방식

맞춤형 개념 수업 → 수준별 문제 풀이 → 맞춤형 문제 해설 → 후행(선행) 학습/ 오답 숙제 부여 → 진단평가/ 성취도 평가

□ 6단계: 2주일간 동일 방식으로 단원 진행 (최소 주 9시간)

- 4.5시간 (설명시간 포함)/단원 * 4단원 이상

□ 7단계: Homework 2

- 2주 단위로 오답 문제집 숙제

→ 스스로 풀어 보도록 함. 다음 수업시간에 제출 및 채점

→ 선생님이 다시 설명하고 채점 내용 시스템 반영

□ 8단계: Homework 3

- 월 단위로 오답 문제집 숙제

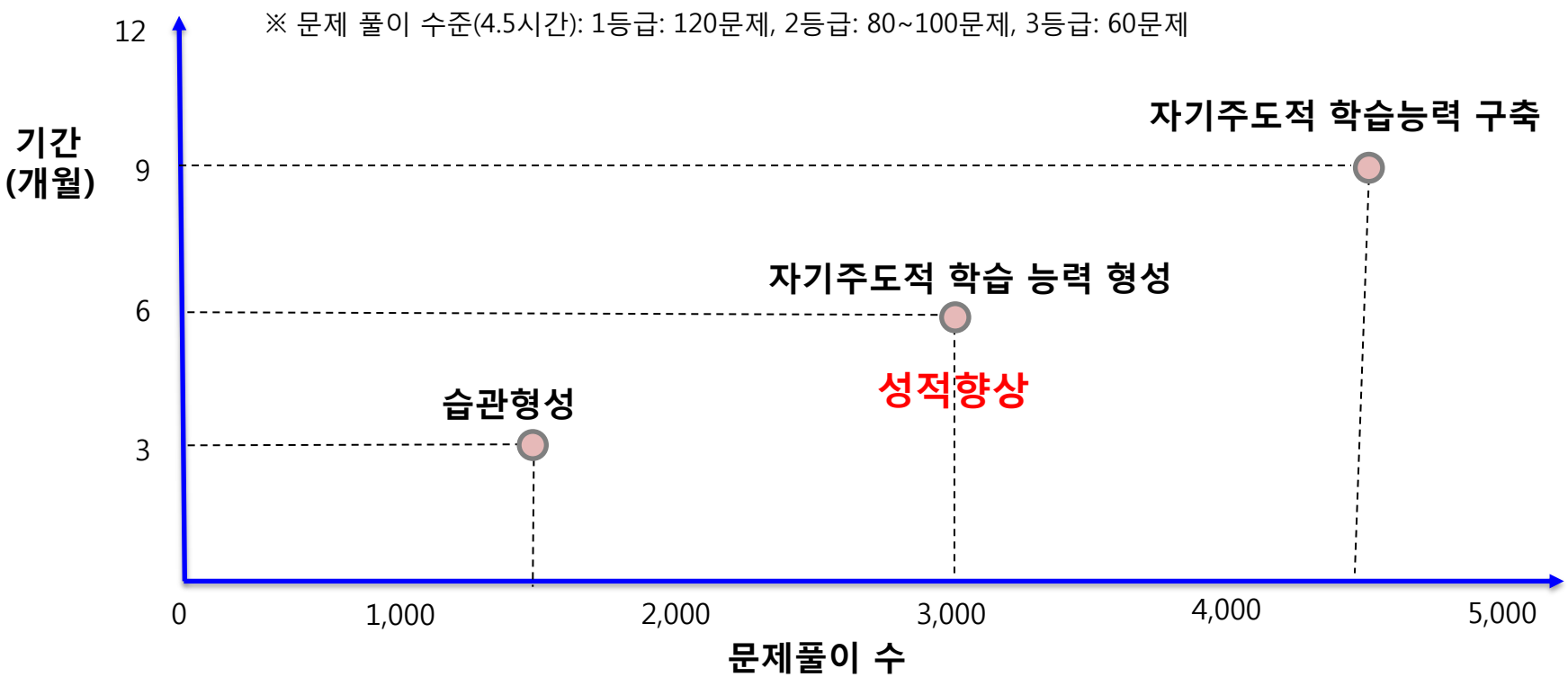
□ 9단계/10단계: 레벨4 & 레벨5 문제 풀이

- 해당 단원들의 레벨3과정까지 마친 후 동일한 방식으로 진도 나감

K-Tutor 수학 | 단계별 성취도

□ **공부하는 습관 및 자기 주도적 학습 능력 배양 (주 9시간 기준)**

- 1,500문제 풀면 공부하는 습관 형성 (3개월) → 자기 주도적 학습 능력의 기틀 마련
- 3,000문제 풀면 성적 향상 눈에 보임 (6개월) → 자기 주도적 학습 능력 형성
- 4,500문제 풀면 자기 주도적인 학습능력 완전 형성 (9개월)



K-Tutor 수학 | 차별화 및 강점

□ **개인별 수준을 고려한 자기 주도형 학습 진도**

- 개인별 수준에 맞는 학습 진도 계획 수립 가능 (중/고등학교 전학년 레벨별 문제 제공)
- 자유로운 선행 및 후행 학습 진도 변경 가능 → 개별 후행 학습을 통한 기초 보완
- 수준별 맞춤형 시험지 제작 가능 (오답+유사유형+기출문제를 직접 편집하여 제공 가능)

□ **체계적인 오답 관리**

- 머릿속에 들어간 문제를 내가 정확히 알고 있는지 반복적인 진단 가능
- 기간별, 과정별 오답 노트를 실시간 제공 및 지속적인 반복 학습 (최소 3회 이상)
  (오답 문제 및 유사/유관 문제 연계 풀이 가능)
- 각 문항별, 단원별 오답 히스토리 제공 → 빈틈없이 탄탄하게 학습 관리 가능

□ **개인별 진도의 체계적인 시스템 관리**

- 사람(강사)이 아닌 시스템을 통해 개인별 학업 수준 관리
  → 각 단원별 성취도 및 취약 부분 파악, 개인에 맞는 진단 대응 가능
- 개인별 진도 상세 보기, 진도 전체 보기, 단원별 현황, 성적표 등

K-Tutor 수학 | 차별화 및 강점

□ **Big Data기반의 실시간 통계 분석을 통한 개인별 학업 성취도 비교 분석**

- 내 수준에 대한 객관적인 평가 기능 제공 (타 지역, 학년별 비교 평가)
- 특정 대상을 고려한 맞춤형 문제 제공

  : 강남지역 1등급 틀린 심화 문제, 전국에서 가장 많이 틀린 문제,

  정답 율이 가장 높은 기본 문제, 2등급과 3등급 문제 등
- 실시간 문항별 정답 율 제공 (최초 정답 율, 누적 정답율)

  : 문제별 난이도 및 상대 비교 가능

□ **단기적 성취감 제공**

- 쉽게 지치지 않도록 흥미거리 제공 (게임처럼)
- 레벨 부여: 100문제 풀이당 1레벨 상승 (레빌 10 = 1000문제 풀이함)
- 계급 부여: 성취도 및 정답율에 따라 부여 (Lv. 5이상)

※ 수련생(70%↓), 중수(80%↓), 고수(90%↓), 영웅(92%↓), 지존(94%↓), 절대 지존(95%↓), 초인(97%↓), 수학의 신(97%↑)

K-Tutor 수학 | 기타 제공 서비스

□ 진단 평가 및 성취도 평가 제공

- 진단 평가: 선행 학습한 학생의 수준 평가 (80점 미만은 재수강)
- 성취도 평가: 각 단원 종료시 진단 평가 실시 (기본 / 심화 과정 각각 30문제 3세트씩 제공)
- 성적표 제공

□ 상세한 개념 설명서 및 다양한 평가를 위한 최상의 문제 은행

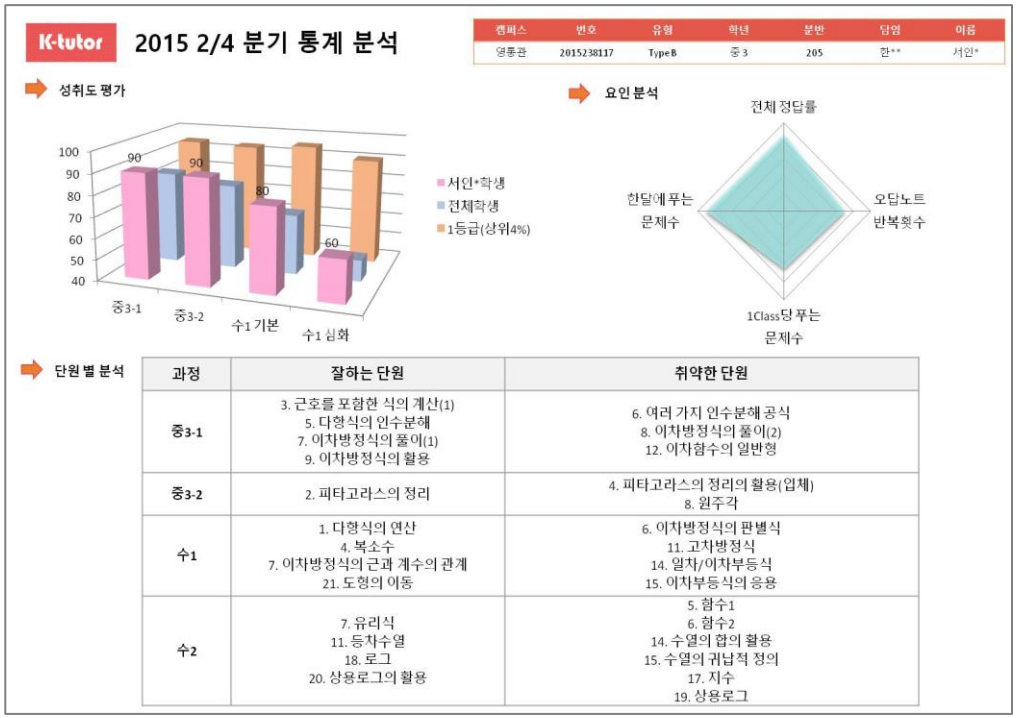
- 강남/강북/경기권/북경 등에서 직접 학원 운영을 하며 지속적인 문제 배열의 최적화
  → 수학교육의 성과는 문제 배열 방식에 따라 좌우됨
- K-Tutor 정규 과정, 성취도 평가 등의 문제 제공 (중학교 ~ 고등학교 전 과정)
- 각 단원별 개념 설명서, 문제별 정답지 및 해설집 제공
- 채점 기능 제공 (별도 시스템)

□ 축적된 노하우 이관

- 수업 방식 및 학생 지도 방식 등

□ 개인별 성취도 진단 평가서 제공 예정 (반기별)

- 월별 성적 분포, 과정별 성적 분포
- 잘하는 단원 및 부족한 단원 분석
- 성취도 비교 분석 (전체, 1등급 대비 등)



□ **오정* (2015년 원촌중 1학년)**

- 수업 전 상황: 캐나다 6학년까지 생활, 중학교 입학 3개월 전 한국 입국.
- 문 제 점: 선행 수업이나 학원 수업 경험 없음. 기초 수학 부족
- 수업 시작: 2014.12월 케이수학으로 수업 첫 시작함 (반포)
- 수업 성과

  : 자기 주도학습으로 1년간 중1~중3 과정을 모두 완료

  : 현재 학교에서 A등급 수준 (과학고 등 특목고 15명 진학 중)

별무리학교 도입 검토 | 대상 및 제공 시스템

□ 대상 인원

- 중등 및 고등과정 전 학년 (2016년: 7학년 ~ 11학년, 2017년: 7학년 ~ 12학년)

  ※ 9학년 인도 과정 포함

□ 제공 시스템 및 서비스

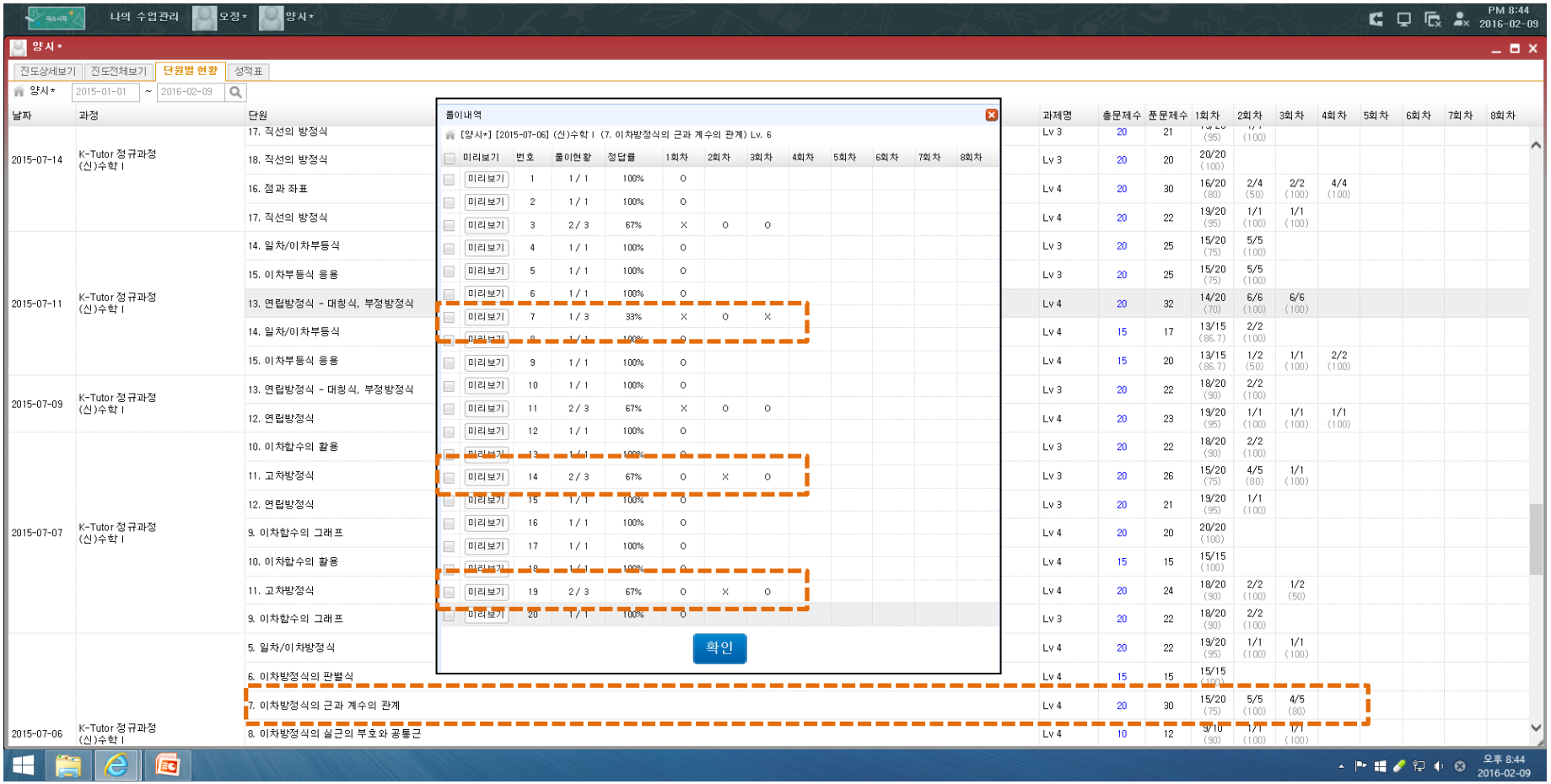
- K-튜터 수학 문제 및 수학 운영 시스템
  - . 수학 문제 은행 (DB), 문제 출제 및 평가 시스템
  - . 실시간 통계 비교 자료
  - . 학생 개인별 진도 현황 및 관리 시스템
  - . 관리자용 운영 시스템 (관리자별 별도 권한 부여 – Master 및 교사 ID)
- 각 단원별 개념 설명 및 관련 교재 (교재비는 실비 제공)
- 학교 교사 교육 (시스템 운영 교육)
- 학교별 접속 홈페이지 및 문제지 양식 제공 (단, 개발비 별도)
- 시스템 유지 및 관리
- 수학 수업 관련 노하우 모두 전달

K-Tutor 시스템 구성

□ K-Tutor 메인 화면 > 학습 시작 > 학생별 관리 (양시* 학생)

- 여름 방학 중 수학I 역행 학습 진행

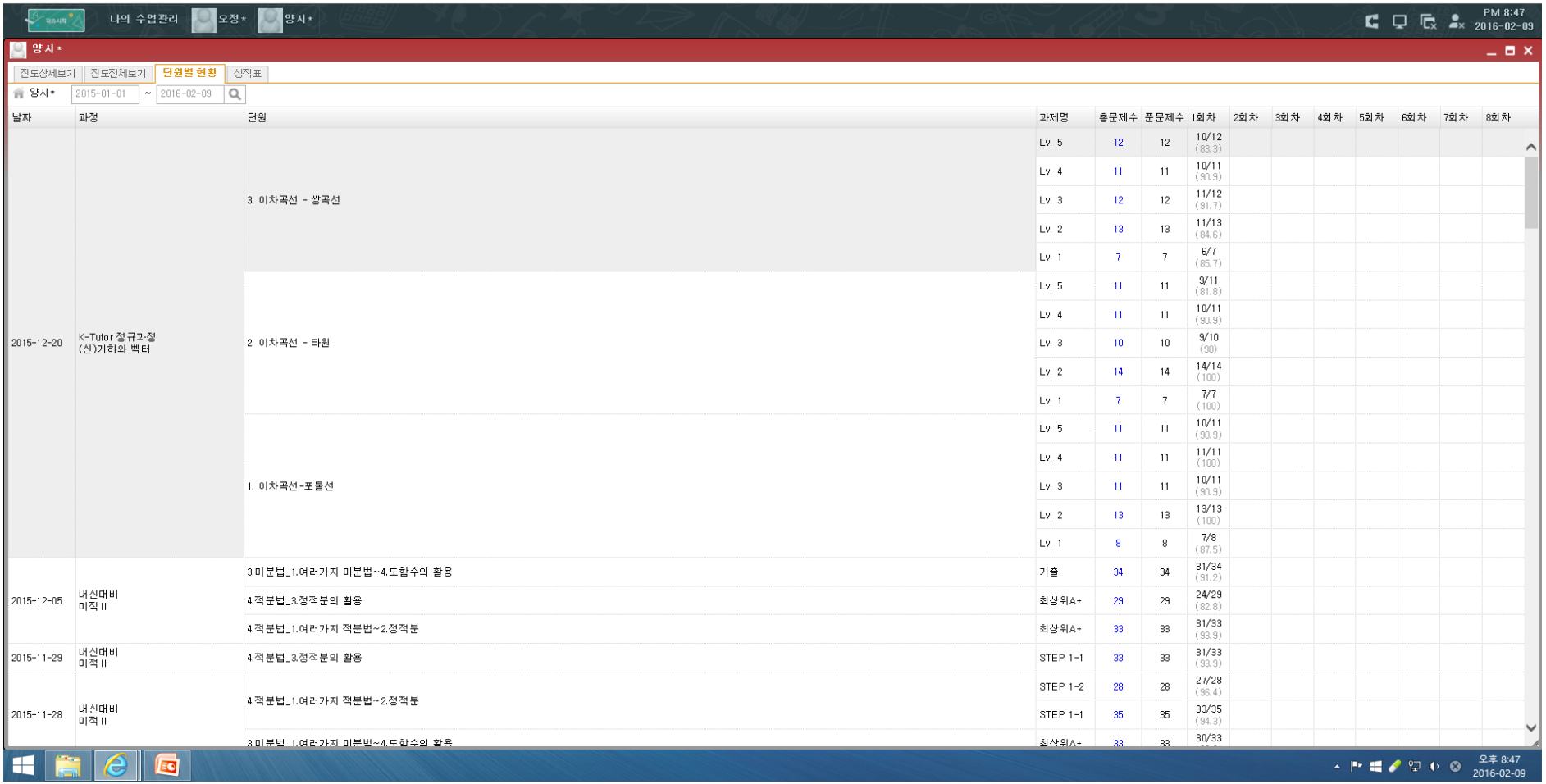
→ 오답율이 높게 나타남 (수학I 기초가 일부 부족했음)



K-Tutor 시스템 구성

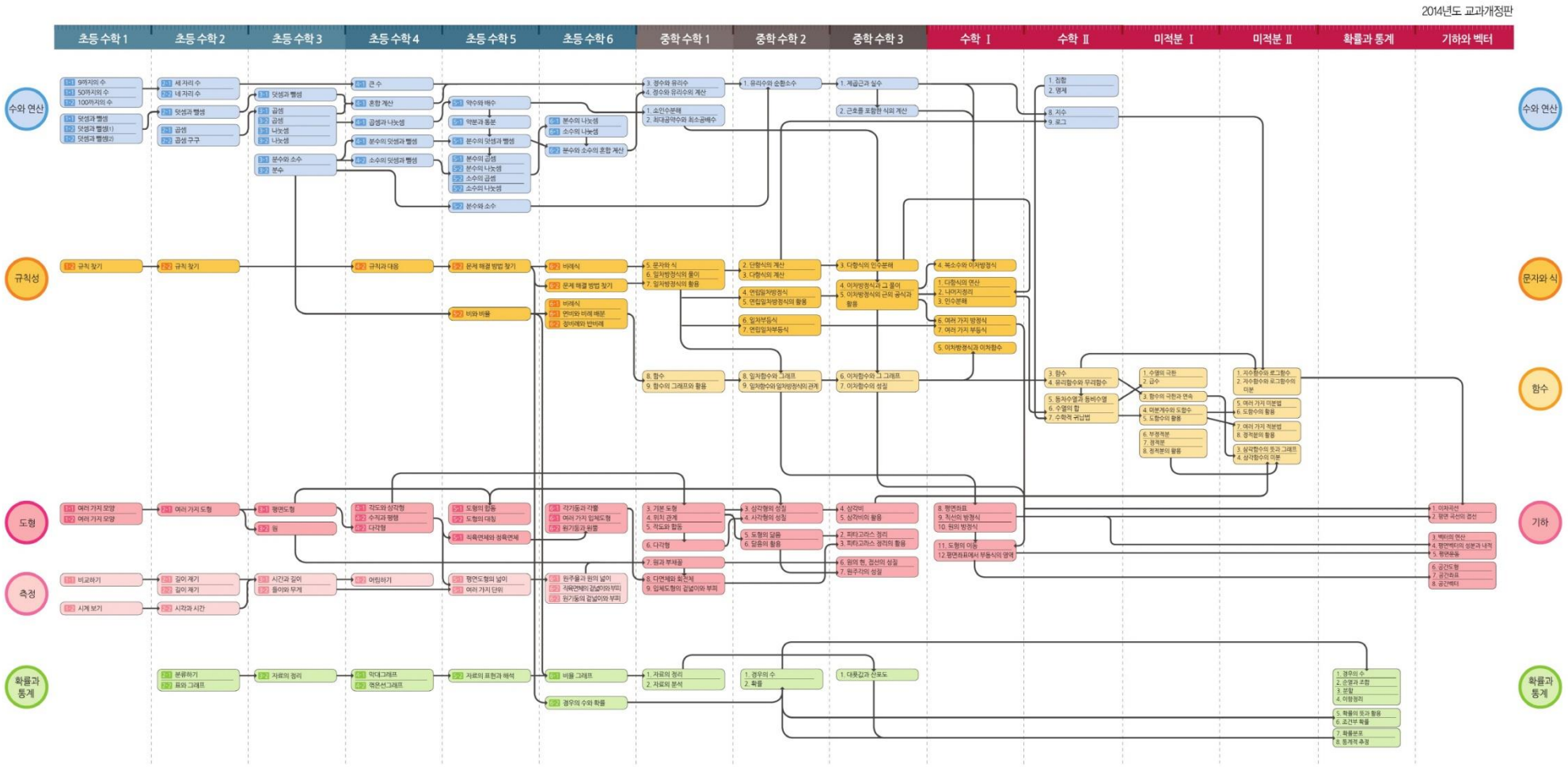
□ K-Tutor 메인 화면 > 학습 시작 > 학생별 관리 (양시* 학생)

- 2학기부터 현격히 안정적인 정답율 유지

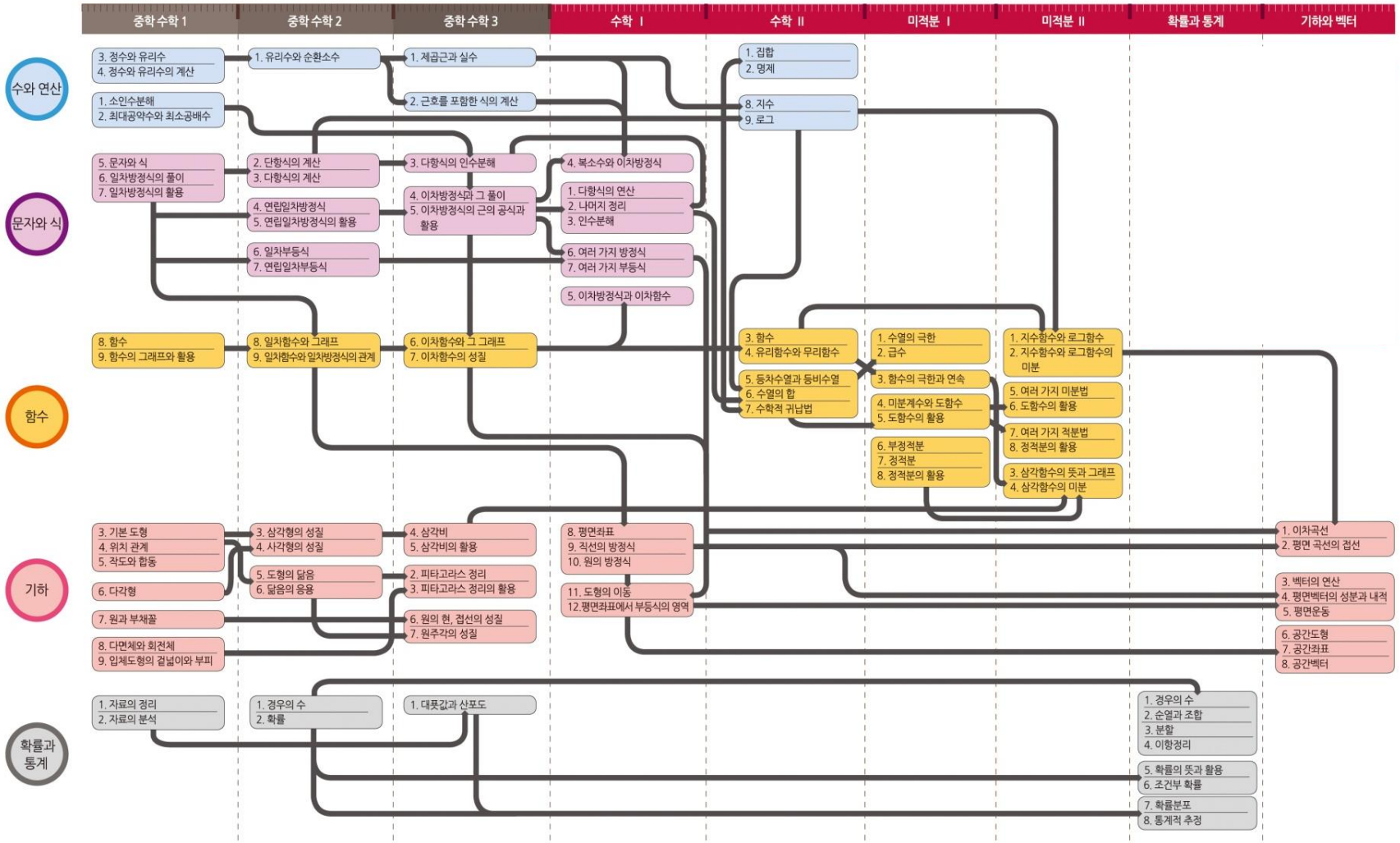


날짜	과정	단원	과제명	출문제수	푼문제수	1회 차	2회 차	3회 차	4회 차	5회 차	6회 차	7회 차	8회 차
2015-12-20	K-Tutor 정규과정 (신)기하와 벡터	3. 이차곡선 - 쌍곡선	Lv. 5	12	12	10/12 (83.3)							
			Lv. 4	11	11	10/11 (90.9)							
			Lv. 3	12	12	11/12 (91.7)							
			Lv. 2	13	13	11/13 (84.6)							
			Lv. 1	7	7	6/7 (85.7)							
		2. 이차곡선 - 타원	Lv. 5	11	11	9/11 (81.8)							
			Lv. 4	11	11	10/11 (90.9)							
			Lv. 3	10	10	9/10 (90)							
			Lv. 2	14	14	14/14 (100)							
			Lv. 1	7	7	7/7 (100)							
		1. 이차곡선-포물선	Lv. 5	11	11	10/11 (90.9)							
			Lv. 4	11	11	11/11 (100)							
			Lv. 3	11	11	10/11 (90.9)							
			Lv. 2	13	13	13/13 (100)							
			Lv. 1	8	8	7/8 (87.5)							
2015-12-05	내신대비 미적 II	3.미분법_1.여러가지 미분법~4.도함수의 활용	기출	34	34	31/34 (91.2)							
		4.적분법_3.정적분의 활용	최상위A+	29	29	24/29 (82.8)							
		4.적분법_1.여러가지 적분법~2.정적분	최상위A+	33	33	31/33 (93.9)							
2015-11-29	내신대비 미적 II	4.적분법_3.정적분의 활용	STEP 1-1	33	33	31/33 (93.9)							
2015-11-28	내신대비 미적 II	4.적분법_1.여러가지 적분법~2.정적분	STEP 1-2	28	28	27/28 (96.4)							
			STEP 1-1	35	35	33/35 (94.3)							
		3.미분법_1.여러가지 미분법~4.도함수의 활용	최상위A+	33	33	30/33							

수학 계통도


2014년도 교과개정판
초등 수학 1
초등 수학 2
초등 수학 3
초등 수학 4
초등 수학 5
초등 수학 6
중학 수학 1
중학 수학 2
중학 수학 3
수학 Ⅰ
수학 Ⅱ
미적분 Ⅰ
미적분 Ⅱ
확률과 통계
기하와 벡터
수와 연산
규칙성
문자와 식
함수
도형
기하
측정
확률과 통계

수학 계통도 | 중등 ~ 고등


중학 수학 1
중학 수학 2
중학 수학 3
수학 I
수학 II
미적분 I
미적분 II
확률과 통계
기하와 벡터
수와 연산
문자와 식
함수
기하
확률과 통계
3. 정수와 유리수
4. 정수와 유리수의 계산
1. 소인수분해
2. 최대공약수와 최소공배수
1. 유리수와 순환소수
1. 제곱근과 실수
2. 근호를 포함한 식의 계산
1. 집합
2. 명제
8. 지수
9. 로그
5. 문자와 식
6. 일차방정식의 풀이
7. 일차방정식의 활용
2. 단항식의 계산
3. 다항식의 계산
4. 연립일차방정식
5. 연립일차방정식의 활용
6. 일차부등식
7. 연립일차부등식
3. 다항식의 인수분해
4. 이차방정식과 그 풀이
5. 이차방정식의 근의 공식과 활용
4. 복소수와 이차방정식
1. 다항식의 연산
2. 나머지 정리
3. 인수분해
6. 여러 가지 방정식
7. 여러 가지 부등식
5. 이차방정식과 이차함수
8. 함수
9. 함수의 그래프와 활용
8. 일차함수와 그래프
9. 일차함수와 일차방정식의 관계
6. 이차함수와 그 그래프
7. 이차함수의 성질
3. 함수
4. 유리함수와 무리함수
5. 등차수열과 등비수열
6. 수열의 합
7. 수학적 귀납법
1. 수열의 극한
2. 급수
3. 함수의 극한과 연속
4. 미분계수와 도함수
5. 도함수의 활용
6. 부정적분
7. 정적분
8. 정적분의 활용
1. 지수함수와 로그함수
2. 지수함수와 로그함수의 미분
5. 여러 가지 미분법
6. 도함수의 활용
7. 여러 가지 적분법
8. 정적분의 활용
3. 삼각함수의 뜻과 그래프
4. 삼각함수의 미분
3. 기본 도형
4. 위치 관계
5. 작도와 합동
6. 다각형
7. 원과 부채꼴
8. 다면체와 회전체
9. 입체도형의 겉넓이와 부피
3. 삼각형의 성질
4. 사각형의 성질
5. 도형의 닮음
6. 닮음의 응용
4. 삼각비
5. 삼각비의 활용
2. 피타고라스 정리
3. 피타고라스 정리의 활용
6. 원의 현, 접선의 성질
7. 원주각의 성질
8. 평면좌표
9. 직선의 방정식
10. 원의 방정식
11. 도형의 이동
12. 평면좌표에서 부등식의 영역
1. 이차곡선
2. 평면 곡선의 접선
3. 벡터의 연산
4. 평면벡터의 성분과 내적
5. 평면운동
6. 공간도형
7. 공간좌표
8. 공간벡터
1. 자료의 정리
2. 자료의 분석
1. 경우의 수
2. 확률
1. 대푯값과 산포도
1. 경우의 수
2. 순열과 조합
3. 분할
4. 이항정리
5. 확률의 뜻과 활용
6. 조건부 확률
7. 확률분포
8. 통계적 추정

□ 연간 시스템 이용료

- 인당 18천원/월 (부가세 별도) 기준, 별무리 특별 추가 할인 적용 (20~10%)
- 연간 계약 시 10% 할인 (매년 재계약시 추가 1%, 최대 5% 추가 할인)
- 3년 단위로 연간 계약 진행 시 할인된 금액 기준 5% 추가 할인

연도	인당/월	인원수	기간	연간 총액	할인율	확정액	별무리 추가 할인	별무리 할인가 총액	별무리 제안가 총액
2016	18,000	230	12	49,680,000	10%	44,712,000	총액기준 20% 할인	36,216,720	**36,000,000**
2017	18,000	280	12	60,480,000	11%	53,827,200	총액기준 15% 할인	45,753,120	**45,700,000**
2018	19,000	280	12	63,840,000	12%	56,179,200	총액기준 10% 할인	50,561,280	**50,500,000**
2019	19,000	280	12	63,840,000	13%	55,540,800	총액기준 10% 할인	49,986,720	**49,900,000**
2020	20,000	280	12	67,200,000	14%	57,792,000	총액기준 10% 할인	52,012,800	**52,000,000**
2021	20,000	280	12	67,200,000	15%	57,120,000	총액기준 10% 할인	51,408,000	**51,400,000**

※ 인당 기준액을 물가 상승율 반영하여 2년 단위로 변경 적용 예정